

التقريب التربيعي:

لنفترض أن الدالة  $y = f(x)$  ونقدرها في كثير من حدود من الدرجة الثانية من الشكل:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

يجب أن يكون مربع الفرق  $[y_i - p(x_i)]^2$  صغيراً

$$E(a_0, a_1, a_2) = \min \sum_{i=0}^n [y_i - p(x_i)]^2$$

$$= \min \sum_{i=0}^n [y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2)]^2$$

تبلغ نهاية حد عند ما يكون  $\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0$

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=0}^n [y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2)] = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=0}^n [y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2)] x_i$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_2} = -2 \sum_{i=0}^n [y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2)] x_i^2$$

نوزع إشارة المجموع على المعادلات فنصل على جملة المعادلات الخطية التالية:

$$1) (n+1) \cdot a_0 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^2 = \sum_{i=0}^n y_i$$

$$2) a_0 \sum_{i=0}^n x_i + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^3 = \sum_{i=0}^n x_i y_i$$

$$3) a_0 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^4 = \sum_{i=0}^n y_i x_i^2$$

٣ معادلات خطية لمجهولين

بالحل المشترك لهذه الجملة الخطية من المعادلات المجهولين  $a_0, a_1, a_2$  لكل نحصل على قيم

$a_0, a_1, a_2$



لنفس المبدأ يمكننا تقريب كثيرات الحدود من الدرجات العليا مثل المثال التالي:

مثال: اوجد بطريقة المربعات الصغرى كثير حدود التقريب من الدرجة الثانية:

$x_i$	-2	-1	0	1
$y_i$	-3	2	1	0

لدينا 4 بيانات كثيرة حدود التقريب لدينا:

$$(n+1)a_0 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^2 = \sum_{i=0}^n y_i$$

$$a_0 \sum_{i=0}^n x_i + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^3 = \sum_{i=0}^n x_i y_i$$

$$a_0 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^4 = \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i$$

$$4a_0 - 2a_1 + 6a_2 = 0$$

$$-2a_0 + 6a_1 - 8a_2 = 4$$

$$+6a_0 - 8a_1 + 18a_2 = -10$$

$$2a_0 - a_1 + 3a_2 = 0 \quad (1)$$

$$-2a_0 + 6a_1 - 8a_2 = 4 \quad (2)$$

$$6a_0 - 8a_1 + 18a_2 = -10 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} 4a_2 &= -6 \\ a_2 &= -\frac{3}{2} \end{aligned} \quad \begin{cases} (1) & 2a_0 - a_1 + 3a_2 = 0 \\ (2) & 5a_1 - 5a_2 = 4 \\ (3) & -5a_1 + 9a_2 = -10 \end{cases}$$

$$a_1 = -\frac{7}{10}, \quad a_0 = \frac{19}{10}$$

$$P_2(x) = 1.9 - 0.7x - 1.5x^2$$

كثيرة حدود التقريب المطلوب



$x_i$	-2	-1	0	1
$y_i$	9	-2	-1	-8

أوجد بالطرائق السابقة:

كثيرة حدود التقريب

- ١- الفروق المباشرة (نيرتن).
- ٢- الفروق المتوسطة.
- ٣- بطريقة لاغرانج "الدرجة الأولى - الثانية - الثالثة".
- ٤- بطريقة المربعات الصغرى "الأولى الثانية - الثالثة".

أوجد بطرائق السابقة: كثيرة حدود التقريب للدالة التالية:

$$y = \tan(2x)$$

$$x_0 = 0, \quad n = 4,$$

$$h = \frac{\pi}{5}$$

- أجب الخطأ المتركب الناتج بعد حساب.
- أوجد القيمة التقريبية عند النقطة  $x=1$ .

حساب قيمة كثيرات الحدود وتبسيط مشتقاتها المتتالية عند نقطة محددة.

طريقة هورنر:

لتفرض لدينا كثيرة حدود من الدرجة  $n$   $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  ولتوجد قيمة كثيرة الحدود وتبسيط مشتقاتها المتتالية عند النقطة  $x=0$  نضع الكائنات على سطح والامثال المألوفة نكتب مكانها الصفر ثم نجرى العمليات التالية:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & a_0 \\
 & & & & & a_1 & \\
 & & & & a_{n-2} & & \\
 & & a_{n-1} & & & & \\
 & a_n & & & & & \\
 \hline
 & & & & & & a_0' = p_1' \\
 & & & & & a_{n-1}' & \\
 & & & & a_{n-2}' & & \\
 & & a_{n-1}' & & & & \\
 & a_n' & & & & & \\
 \hline
 & & & & & & a_{n-1} = a_n
 \end{array}$$

المقسوم عليه  $x=b$

نفيد هذه العملية على الناتج السابق فنحصل على قيمة كثيرة الحدود وتبسيط مشتقاتها.



SUBJECT:

عند النقطة  $x=6$   
 إذا الأمثال تنطه المتكسوم.

• اوجد متيعة كثيرة الحدود التالية عند النقطة  $x=1$  ومتيعة مشتقاتها المتتالية عند النقطة  $x=1$ .

$$x^4 - 3x^3 + 2x - 1$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad -3 \quad 0 \quad 2 \quad -1 \\ x=1 \quad 1 \quad | \quad \text{الجم} \quad -2 \quad -2 \quad 0 \\ 1 \quad -2 \quad -2 \quad 0 \quad -1 = \frac{P_0(1)}{0!} \end{array}$$

إذا عوضنا بكثيرة الحدود نجد انه يطالع -1  $\frac{P_0(1)}{0!} = P_0(1) = -1$

$$\begin{array}{r} 1 \quad -3 \quad 0 \quad 2 \quad -1 \\ x=1 \quad 1 \quad | \quad 1 \quad -2 \quad -2 \quad 0 \\ \quad \quad -2 \quad -2 \quad 0 \quad | \quad -1 \quad P_1(1) \\ x=1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -3 \\ \quad \quad -1 \quad -3 \quad | \quad -3 \quad \frac{P_1'(1)}{1!} = -3 \\ \quad \quad \downarrow \quad 1 \quad 0 \\ x=1 \quad 1 \quad 0 \quad | \quad -3 \quad \frac{P_1''(1)}{2!} = 6 \end{array}$$

تجربنا! لبدن قسم  $x^4 - 2x^2 - 2x + 1$  على  $x-1$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad -2 \quad -2 \quad 1 \\ x=1 \quad 1 \quad | \quad 1 \quad -1 \quad -3 \quad -2 \\ \quad \quad 1 \quad -1 \quad -3 \quad -2 \end{array}$$

$$\frac{x^4 - 2x^2 - 2x + 1}{x-1} = \frac{x^3 + x^2 - x - 3}{x-1} - \frac{2}{x-1}$$



على  $x-1$   $3x^4 - 2x^2 - 2x + 1$

نعمين 2

$$\begin{array}{r} 3 \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \\ \downarrow \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \\ 1 \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \\ \phantom{0000} 3 \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \\ \phantom{0000} \phantom{0000} 0 \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \\ \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} 3 \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \\ \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} 3 \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \\ \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} 1 \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \\ \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} -1 \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \\ \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} -1 \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \\ \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} 1 \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \phantom{0000} \end{array}$$

الباقية  $\rightarrow$   $\boxed{0}$

$$\frac{3x^4 - 2x^2 - 2x + 1}{x-1} = 3x^3 + 3x^2 + x - 1$$

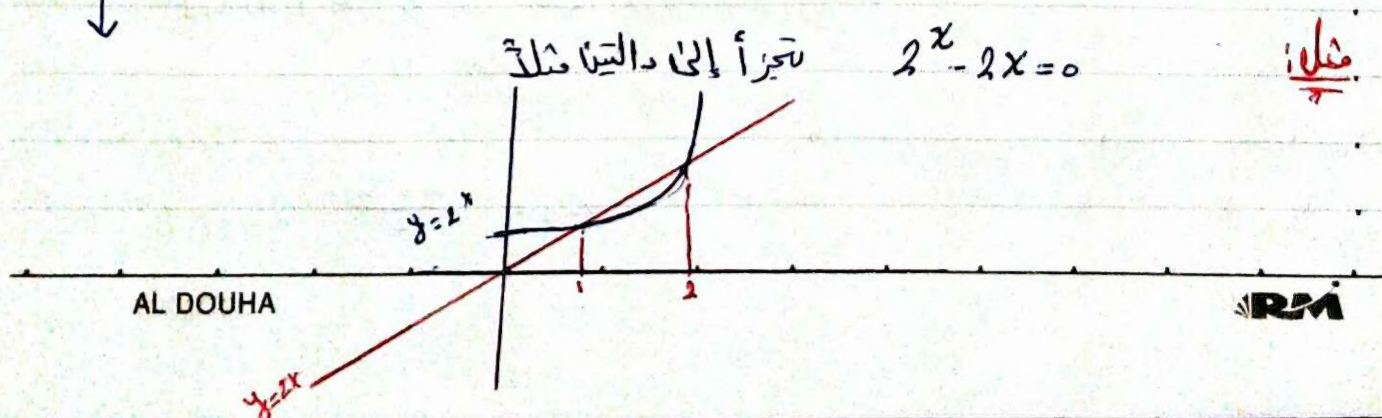
### الطرائق العددية لكل المعادلات الجبرية

الفصل الرابع:

المعادلة الجبرية: هي كل معادلة غير خطية وقد تتحول من جذور دالة مثلية ودالة أسية ودالة لوغاريتمية وأحياناً دالة جذرية أو كسرية.

نفترض لدينا المعادلة الجبرية  $f(x) = 0$  —  $y = f(x)$  معادلة جبرية نبحث عن مواقع الجذور بطريقتين: الطريقة البيانية ونطبق هذه الطريقة عند الدوال بسيطة خطوطها البيانية معلومة بحيث نقول بأن حل المعادلة الجبرية  $f(x) = 0$  يوافق نقطة تقاطع الخط البياني للدالة مع المحور  $x$ .

لكن في بعض الأحيان قد تكون الدالة ذات صيغة أكثر تعقيداً في هذه الحالة نحاول أن نجزء الصيغة التحليلية إلى مجموع أوجداء دوال بسيطة خطوطها البيانية معلومة فيكون حل المعادلة الأساسية هو فواصل نقاط تقاطع الخط البياني للدالة الجزئية  $x$ .





**ط 2** هي الطريقة الجبرية: لتبين الجذر لدينا  $f(x) = 0$  ونبحث له عن جذر ضمن المجال  $[a, b]$ .  
نحسب قيمة الدالة على طرفي المجال.

(1)  $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow x^* \in [a, b]$  نكتم على وجود الجذر ضمن المجال.

(2)  $f(a) \cdot f(b) = 0$  أكيد 1 جذرا هو الجذر إما  $f(a) = 0$  وبالتالي  $a$  هو الجذر

أو  $f(b) = 0$  فإن  $b$  هو الجذر.

(3)  $f(a) \cdot f(b) > 0$  في هذه الحالة نغير حالتين إما أنه لا يوجد أي جذر ضمن المجال  $[a, b]$  أو يوجد جذور لكن عددها زوجي.

**لنبدأ الطرائق العددية بالطريقة الأولى:**

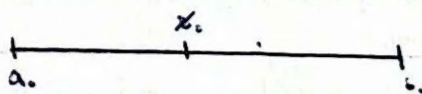
**الطريقة الأولى:** "طريقة تنصيف المجال"

نفترض أن لدينا المعادلة الجبرية  $f(x) = 0$  ولتوجد جذرها في المجال  $[a, b]$ .

**III**  $f(a) \cdot f(b) < 0$  فأكيد يوجد جذر

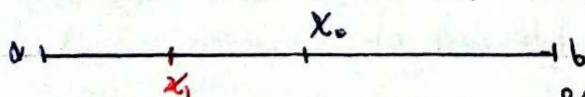
$x_0 = \frac{a+b}{2}$  نقطة منتصف المجال

وهو التقريب الأول



$f(a) \cdot f(x_0) < 0 \quad x \in [a, x_0]$

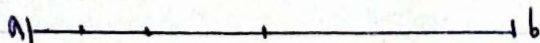
في هذه الحالة نأخذ فنصفه المجال السابق



$x_1 = \frac{a+x_0}{2}$

$f(a) \cdot f(x_1) < 0 \quad ; \quad x^* \in [a, x_1]$

والا فقال آخر



$x_2 \quad x_1 \quad x$

$x_2 = \frac{a+x_1}{2}$



وهكذا نستمر بهذه العملية فنصل على متتالية من الحلول التقريبية المتقاربة

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$$

$$|x_{i+1} - x_i| < \epsilon \quad \epsilon > 0$$

$$x^* \approx x_n$$

نلاحظ من خلال هذه الطريقة أنه في كل مرة نقسم المجال إلى 2 فإن عدد المرات التي تقسم فيها المجال [0, 1] يحقق المراجعة التالية:

$$R = \frac{b-a}{2^n} < 10^{-x}$$

هذه المراجعة تفيدنا في حساب الخطأ المركب بعد عدد محدد من المرات التقسيم أو تفيد بحساب الخطأ المركب بعد عدد محليات تكرارية كما في المثال.

**مثال:** لنفرض لدينا المعادلة التالية:

$$x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$$

ونوجد حلها ضمن المجال [0, 1] بطريقة تنصيف المجال.

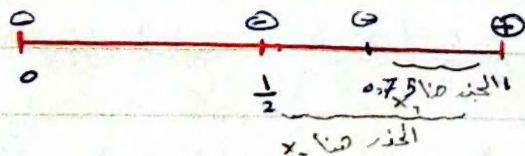
نعم أجب عدد مرات التكرار أو تنصيف المجال بحيث لا يتجاوز الخطأ المركب  $\frac{1}{1000}$ .

**الحل:** لهذه المعادلة أربعة جذور والمطلوب الجذر الموجود في هذا المجال.

$$x^* \in [0, 1] \quad \text{الجذر المطلوب} \quad f(0) \cdot f(1) < 0$$

$$x_0 = 0.5$$

$$f(x_0) = -1.875$$



$$f(0.5) \cdot f(1) < 0$$

$$x^* \in [0.5, 1] \quad \text{نقسم هذا المجال}$$

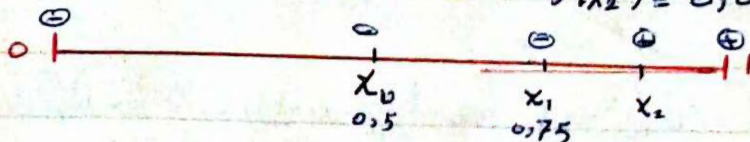
$$f(x_0) = -0.58984375 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{0.5 + 1}{2} = 0.75$$



$$f(0,75) \cdot f(1) < 0 \quad x^* \in [0,75, 1]$$

$$x_2 = \frac{0,75 + 1}{2} = 0,875$$

$$f(x_2) = 0,05102539$$



بالتالي

$$x^* \in [0,75, 0,875] \quad f(0,75) \cdot f(0,875) < 0$$

$$x_3 = 0,8125$$

$$|x_3 - x_2| = 0,0625 \leq \epsilon$$

$$x^* \approx 0,8125$$

عدد المرات لتقريب المجال لكي لا يتجاوز الخطأ المركب  $\frac{1}{1000}$

$$\frac{b-a}{2^n} < 10^{-3}$$

$$\frac{1}{2^n} < 10^{-3} \Rightarrow 2^n > 10^3$$

$$\log_{10} 2^n > \log_{10} 10^3 = 3$$

عدد المرات من الشرط ورافوف  $n \log_{10} 2 > 3 \Rightarrow n > \frac{3}{\log_{10} 2} = 9,9657 = 10$

**الطريقة الثانية:** "طريقة القاطع" "مورد"

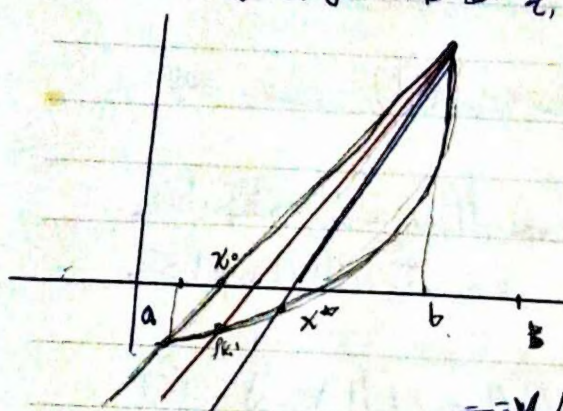
الفرض لدينا المعادلة الجبرية  $f(x) = 0$  ونوجد لها جذراً ضمن المجال  $[a, b]$  على اعتبار

$a < b$ ،  $f(a) \cdot f(b) < 0$  نحسب على متوالي الدالة النقطة  $a$ ،  $f(a)$  والنقطة  $b$ ،  $f(b)$

نعم نصل بين ما بين النقطتين فيقطع مستقيم الوصل المحاور  $x=0$  في نقطة جديدة نسحبها  $x$



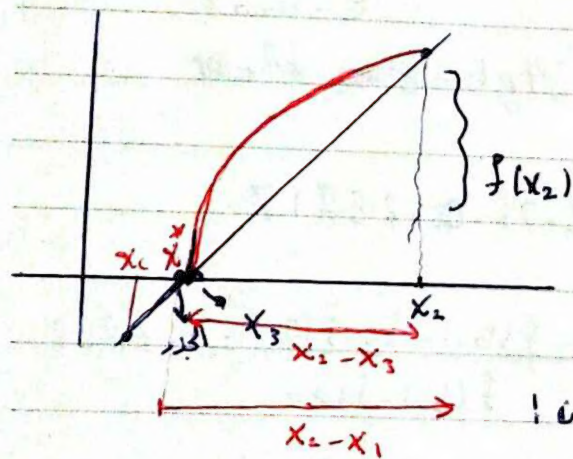
التي تقبّر التقريب الأول.  
من جديد نأخذ على منحنى الدالة النقطة  $x_0$  ،  $f(x_0)$  نمر نقطتها مابين التقاطعين  $x_0$  و  $f(x_0)$  و  $f(b)$   
فيقطع مستقيم الوصل للمحور  $x$  في نقطة جديدة وهي  $x_1$  كما في الشكل التالي:



وهكذا باستمرار نحصل على متتالية من الحلول التقريبية.

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$   
تقرب شيئاً فشيئاً باتجاه الحل الحقيقي  $x^*$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$

$\epsilon > 0$  ،  $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon \Rightarrow$  توقف عند تحقق هذه العلاقة  
 $x^* \approx x_{n+1}$



لوجد الآن هندسياً أي يجار دستور هذه الطريقة

من نهاية النقاط:

$$\frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

في هذه الملاحظة نكتب  $x_2$  بدلالة بقية الحدود؛ فنجد أن:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_1)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

$$x_3 = \frac{x_2 \cdot f(x_2) - x_2 \cdot f(x_1) - x_2 \cdot f(x_2) + x_1 \cdot f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

$$x_3 = \frac{x_1 \cdot f(x_2) - x_2 \cdot f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

$$x_n = \frac{(x_{n-2}) \cdot f(x_{n-1}) - (x_{n-1}) \cdot f(x_{n-2})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$$

بالتالي:



$$x_{n-2} = b_n \quad , \quad x_{n-1} = a_n$$

$$x_n = \frac{a_n \cdot f(b_n) - b_n \cdot f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

وهو دستور القاطع للبيجار جذور المعادلات الغير خطية

• بكل خطوة ينتج مجال جديد ؛ يجب تحديد المجال في كل مرة  $[a_n, b_n]$  .  
• كما في المثال الآتي :

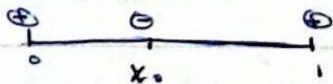
لتكن لدينا المعادلة التالية أوجد حلها بطريقة القاطع :

$$e^x - 3x = 0 \quad ; \quad \varepsilon = 0.004$$

بفرض الطريقة ك نحتاج إلى نقطة ابتدائية

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ f(a_0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ f(a_1) = e - 3 = -0.28717 \end{cases}$$



$$x_0 = \frac{a_0 \cdot f(b_0) - b_0 \cdot f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} = 0.780202717$$

$$f(x_0) = -0.168693619$$

نلاحظ  $f(0) \cdot f(x_0) < 0$  أي أن الجذر  $x^* \in [0, x_0]$

$$x^* \in [0, 0.780202717]$$

$$a_1 = 0 \Rightarrow f(a_1) = 1$$

$$b_1 = 0.780202717 ; f(b_1) = 0.158693619$$

$$x_1 = \frac{a_1 \cdot f(b_1) - b_1 \cdot f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)} = 0.673346866$$



SUBJECT: \_\_\_\_\_

$$x_2 = 0,635681618$$

نفس المبدأ بنسبة  $x_2$

$$x_2 - x_1 = 0,037665247 < 0,04$$

$$x^* \approx x_2 = 0,635681618$$

الحل المطلوب دقتاً لـ  $\epsilon$ .

12) \* أو جد بطريقة القاطع حل للمعادلة:

$$x^4 - 3x^3 + x - 1 = 0$$

ضمن  $[0,2]$

$$\epsilon = 0,005$$